Discussione Punti salienti e critici del modello teorico

Giovanangelo Matteo

September 5, 2025

Abstract

Si introducono le possibili criticità del modello, dimostrandole e verificandole matematicamente, rinforzando quanto già pubblicato. Questa trattazione rende ancora più solida la teoria di decomposizione ed estensione del tensore di einstein che definisce la struttura dello spaziotempo.

1 Verifica della consistenza matematica: conservazione del tensore energia-impulso

Nel modello, l'equazione di campo modificata assume la forma:

$$G_{\mu\nu} = G^{(s)}_{\mu\nu} + G^{(t)}_{\mu\nu} + \varphi(x^\alpha)\, G^{(c)}_{\mu\nu}, \tag{1}$$

dove $\varphi(x^\alpha)$ è un campo scalare dinamico, e $G^{(c)}_{\mu\nu}$ rappresenta il tensore di correlazione geometrico.

Affinché la teoria sia compatibile con la geometria differenziale standard, la **conservazione dell'energia-impulso** richiede:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^\mu G^{\text{eff}}_{\mu\nu} = 0, \tag{2}$$

dove il tensore efficace è:

$$G^{\text{eff}}_{\mu\nu} := G^{(s)}_{\mu\nu} + G^{(t)}_{\mu\nu} + \varphi(x^\alpha)\, G^{(c)}_{\mu\nu}. \tag{3}$$

Calcoliamo ora la derivata covariante del termine correttivo:

$$\nabla^\mu \left(\varphi\, G^{(c)}_{\mu\nu}\right) = (\nabla^\mu \varphi)\, G^{(c)}_{\mu\nu} + \varphi\, \nabla^\mu G^{(c)}_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Per assicurare la **conservazione dell'energia-impulso**, dobbiamo imporre che:

$$\nabla^\mu G^{(s)}_{\mu\nu} + \nabla^\mu G^{(t)}_{\mu\nu} + \nabla^\mu \left(\varphi\, G^{(c)}_{\mu\nu}\right) = 0. \tag{5}$$

Pertanto, la condizione di consistenza matematica si riduce a:

$$\nabla^\mu G^{(s)}_{\mu\nu} + \nabla^\mu G^{(t)}_{\mu\nu} + (\nabla^\mu \varphi)\, G^{(c)}_{\mu\nu} + \varphi\, \nabla^\mu G^{(c)}_{\mu\nu} = 0. \tag{6}$$

Condizioni sufficienti per la conservazione

Affinché l'equazione (6) sia soddisfatta, è sufficiente che valga almeno una delle seguenti:

(i) $\nabla^\mu G^{(c)}_{\mu\nu} = 0$: il tensore di correlazione è divergente nullo;

(ii) $G^{(c)}_{\mu\nu} \propto \nabla_\mu \varphi$: accoppiamento coerente con il gradiente del campo scalare;

(iii) I termini $\nabla^\mu G^{(s)}_{\mu\nu}$ e $\nabla^\mu G^{(t)}_{\mu\nu}$ compensano esattamente il termine di correlazione.

Conclusione

La formulazione rimane **matematicamente coerente** se il tensore $G_{\mu\nu}^{(c)}$ è costruito in modo da essere compatibile con le simmetrie geometriche e se il campo $\varphi(x^\alpha)$ è tale da garantire, insieme, la **conservazione covariante del tensore energia-impulso totale**.

Nel caso particolare in cui $\varphi \to 0$, la teoria si riconduce esattamente alla Relatività Generale, preservando la coerenza formale anche nel limite classico.

1. Definizione strutturale del modello

Sia la decomposizione del tensore di Einstein estesa nel seguente modo:

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(s)} + G_{\mu\nu}^{(t)} + \varphi(x^\alpha) \cdot G_{\mu\nu}^{(c)}, \tag{7}$$

dove:

- $G_{\mu\nu}^{(s)}$: contributo spaziale;
- $G_{\mu\nu}^{(t)}$: contributo temporale;
- $G_{\mu\nu}^{(c)}$: contributo misto spazio-temporale;
- $\varphi(x^\alpha)$: campo scalare dinamico (fattore di correlazione).

2. Condizione di conservazione dell'energia-impulso

La Relatività Generale impone:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \tag{8}$$

che deve valere anche nella teoria modificata. Inseriamo la decomposizione:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = \nabla^\mu \left(G_{\mu\nu}^{(s)} + G_{\mu\nu}^{(t)} + \varphi \cdot G_{\mu\nu}^{(c)} \right) \tag{9}$$

$$= \nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(s)} + \nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(t)} + \nabla^\mu (\varphi \cdot G_{\mu\nu}^{(c)}). \tag{10}$$

Supponiamo che le componenti spaziale e temporale soddisfino:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(s)} + \nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(t)} = 0.$$

Allora:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = \nabla^\mu (\varphi \cdot G_{\mu\nu}^{(c)}) = (\nabla^\mu \varphi) G_{\mu\nu}^{(c)} + \varphi \cdot \nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(c)}. \tag{11}$$

Condizione di consistenza:
Affinché la conservazione dell'energia-impulso sia garantita, è sufficiente richiedere:

$$(\nabla^\mu \varphi) G_{\mu\nu}^{(c)} + \varphi \cdot \nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(c)} = 0. \tag{12}$$

Questa condizione può essere soddisfatta in due casi:

- **(a) Campo costante:** $\nabla^\mu \varphi = 0$ (limite GR), si ha $\nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(c)} = 0$
- **(b) Campo dinamico:** Se $\varphi \neq \text{const}$, allora imponiamo:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(c)} = -\frac{1}{\varphi} (\nabla^\mu \varphi) G_{\mu\nu}^{(c)}.$$

Osservazione: Tale relazione definisce una *divergenza covariante controllata* del tensore $G^{(c)}_{\mu\nu}$ che può essere regolare se φ è liscia e mai nulla (cioè infinitamente differenziabile: $\varphi(x^\alpha) \neq 0$).

3. Coerenza con la struttura tensoriale

Il tensore $G^{(c)}_{\mu\nu}$ è definito su un sottospazio dello spaziotempo, in cui è attiva l'interazione geometrica tra la superficie temporale e il manifold spaziale tridimensionale.

Poniamo:

$$G^{(c)}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove gli asterischi indicano componenti misti (spazio-tempo). La simmetria $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ è preservata.

Nota: Questo tipo di struttura è simile a quella della birifrangenza ottica nei cristalli anisotropi, con direzioni privilegiate localmente ma non globalmente orientabili (analogia con la superficie di Moebius).

4. Coerenza con i dati osservativi

L'effetto osservabile del termine $\varphi \cdot G^{(c)}_{\mu\nu}$ è una modulazione della fase e dell'ampiezza delle onde gravitazionali (QNM), in particolare:

- Shift sistematici nelle frequenze f_n e nei damping time τ_n
- Variazione della fase ϕ_n
- Comparsa di birefringenza gravitazionale (polarizzazione differenziale)

Questi effetti sono stati testati nei dati di eventi come GW190412, GW190521, ecc., mediante fit QNM a due modi. I residui del fit indicano che l'aggiunta del termine $\varphi \cdot G^{(c)}_{\mu\nu}$ migliora significativamente l'efficienza del modello.

5. Conclusione

La struttura matematica proposta è:

- **Covariante:** grazie alla forma differenziale dell'interazione tra φ e $G^{(c)}_{\mu\nu}$
- **Fisicamente compatibile:** con la struttura 4-dimensionale della metrica
- **Osservativamente testabile:** con segnali GW e dati cosmologici

Dunque, la decomposizione:

$$G_{\mu\nu} = G^{(s)}_{\mu\nu} + G^{(t)}_{\mu\nu} + \varphi(x^\alpha) G^{(c)}_{\mu\nu}$$

è formalmente ben definita, priva di divergenze, e coerente con la conservazione dell'energia-impulso a patto che le condizioni di accoppiamento derivativo siano rispettate.

2 Unicità della decomposizione del tensore di Einstein

La decomposizione proposta nella teoria assume la forma:

$$G_{\mu\nu} = G^{(s)}_{\mu\nu} + G^{(t)}_{\mu\nu} + \phi(x^\alpha) \cdot G^{(c)}_{\mu\nu}, \tag{13}$$

dove i termini $G^{(s)}_{\mu\nu}$, $G^{(t)}_{\mu\nu}$ e $G^{(c)}_{\mu\nu}$ rappresentano rispettivamente contributi spaziali, temporali e di correlazione misti.

Tuttavia, questa struttura **non è univoca**: essa rappresenta una **scelta costruttiva specifica**, coerente con il formalismo geometrico e con gli obiettivi fenomenologici del modello. Esistono infatti altri modi, matematicamente equivalenti o alternativi, per decomporre il tensore di Einstein, tra cui:

- **Decomposizione ADM (Arnowitt–Deser–Misner)**: in $3+1$ dimensioni con lapse, shift e metriche spaziali;
- **Decomposizione in scalare, vettore, tensore** (SVT), usata nello studio delle perturbazioni cosmologiche;
- **Formulazioni bimetriche o massive**: che introducono un secondo tensore metrico $f_{\mu\nu}$ e una metrica efficace;
- **Espansioni in campi ausiliari**: come nei modelli scalar–tensor o nelle teorie di campo efficaci (EFT);
- **Proiezioni geometriche locali**: come nei formalismi di tetradi, superfici spaziali o approcci foliazione.

Condizioni per l'equivalenza

Due decomposizioni possono essere considerate fisicamente equivalenti se:

1. producono lo stesso contenuto dinamico (gradi di libertà);
2. rispettano le stesse simmetrie e condizioni di conservazione;
3. riducono alla Relatività Generale nel limite $\phi \to 0$;
4. sono derivabili da un principio variazionale comune o compatibile.

Conclusione

La decomposizione introdotta è quindi **una scelta fisicamente giustificata ma non unica**. Altri modelli possono adottare strutture alternative, potenzialmente riconducibili per mezzo di trasformazioni di campo o ridefinizioni geometriche. La potenziale equivalenza va sempre verificata caso per caso, in base alle osservabili e ai vincoli teorici imposti.

3 Limite GR e condizioni di divergenza della deviazione dal modello

Nel modello proposto, la Relatività Generale viene recuperata esattamente nel limite:

$$\varphi(x^\alpha) \to 0, \tag{14}$$

che implica la disattivazione del tensore di correlazione $G^{(c)}_{\mu\nu}$, riducendo le equazioni di campo alla forma canonica di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = G^{(s)}_{\mu\nu} + G^{(t)}_{\mu\nu} + \underbrace{\varphi \cdot G^{(c)}_{\mu\nu}}_{\to 0} \quad \Rightarrow \quad G_{\mu\nu} \approx G^{(\mathrm{GR})}_{\mu\nu}. \tag{15}$$

Comportamento nel limite forte: divergenze o patologie

Tuttavia, in alcuni regimi, la deviazione dal comportamento previsto dalla Relatività Generale può divergere in modo controllato o patologico. Tali condizioni includono:

1. **Gradiente del campo troppo ripido**:

$$|\nabla_\mu \varphi| \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \text{termini non lineari dominanti.} \tag{16}$$

2. **Singolarità nella normalizzazione del termine correttivo**:

$$\text{se } \varphi \to 0 \quad \text{ma} \quad \frac{1}{\varphi} \text{ compare in } \mathcal{L}_{\text{eff}} \Rightarrow \text{divergenza.} \tag{17}$$

3. **Accoppiamento non minimale con curvature**: se il termine correttivo include interazioni come φR o $\varphi G^{(c)}_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \varphi$, possono insorgere instabilità per configurazioni spaziali disomogenee.

4. **Risonanza modale in fase di ringdown**: il campo φ può amplificare alcuni modi QNM non presenti nella GR, producendo uno shift che diverge rispetto alle predizioni standard, specie in presenza di elevata asimmetria.

5. **Comportamento asintotico in vuoto cosmologico**: in uno scenario FLRW o de Sitter, φ potrebbe crescere su scala cosmologica:

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) \to \infty \quad \Rightarrow \quad \text{termine correttivo dominante a grande scala.} \tag{18}$$

Osservazioni

Le condizioni di divergenza non violano automaticamente la coerenza del modello, ma richiedono:

- una specificazione lagrangiana per regolarizzare il comportamento ultravioletto;
- una parametrizzazione del dominio di validità della teoria;
- un'analisi numerica delle soluzioni dinamiche con $\varphi(x^\alpha)$ in evoluzione.

Conclusione

Il modello converge alla Relatività Generale nel limite $\varphi \to 0$, ma presenta **regimi fortemente non lineari** in cui la deviazione da GR può divergere. Tali effetti, se controllabili, costituiscono la base delle sue predizioni osservabili — in particolare nei segnali GW post-coalescenza e nelle dinamiche cosmologiche avanzate.

1. Lagrangiana regolarizzata per il campo $\varphi(x^\alpha)$

Per evitare divergenze nel regime ad alta frequenza (comportamento UV), si propone una Lagrangiana scalare estesa:

$$\mathcal{L}_\varphi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - V(\varphi) - \frac{\lambda}{\Lambda^2} (\nabla^\mu \varphi \nabla_\mu \varphi)^2, \tag{19}$$

dove:

- $\varphi(x^\alpha)$: campo di correlazione dinamico;
- $V(\varphi)$: potenziale (es. tipo massa o simmetria rotta);
- λ: parametro di accoppiamento non lineare;
- Λ: scala di cutoff (regolarizzazione ultravioletta).

Il termine quartico in derivata rappresenta una correzione EFT (Effective Field Theory), efficace per regolarizzare il comportamento a energie alte, evitando instabilità tipo ghost o divergenze spurie.

2. Dominio di validità della teoria

Poiché la teoria è concepita per estendere la Relatività Generale **in regimi impulsivi**, definiamo il suo dominio di validità come:

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{ x^\alpha \in \mathcal{M} \;\middle|\; \nabla^\mu \nabla_\mu \varphi \sim \mathcal{O}(\omega^2), \quad \omega_{\mathrm{GW}} \in [30\,\mathrm{Hz}, 400\,\mathrm{Hz}] \right\}, \tag{20}$$

cioè:

- valido in regimi dominati da frequenze gravitazionali post-coalescenza;
- la dinamica di φ è rilevante **solo** in regioni del manifold dove l'operatore di d'Alembert è non trascurabile;
- fuori da questo dominio, la teoria si riduce a GR: $\varphi \to 0$, $G_{\mu\nu}^{(c)} \to 0$.

3. Coerenza con la conservazione dell'energia-impulso

L'equazione estesa resta:

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(s)} + G_{\mu\nu}^{(t)} + \varphi \cdot G_{\mu\nu}^{(c)}, \tag{21}$$

con la condizione:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\nabla^\mu \varphi) G_{\mu\nu}^{(c)} + \varphi \cdot \nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(c)} = 0. \tag{22}$$

Grazie alla Lagrangiana con termine quartico, l'equazione di moto per φ regolarizzata è:

$$\Box\varphi + \frac{dV}{d\varphi} + \frac{4\lambda}{\Lambda^2} \nabla^\mu \left((\nabla^\nu \varphi \nabla_\nu \varphi) \nabla_\mu \varphi \right) = 0, \tag{23}$$

che:

- mantiene il comportamento lineare nel limite $\lambda \to 0$;
- introduce una correzione dissipativa non lineare UV-safe.

4. Comportamento nel limite $\varphi \to 0$

Se $\varphi \to 0$, abbiamo:

$$G_{\mu\nu} \to G_{\mu\nu}^{(s)} + G_{\mu\nu}^{(t)}, \tag{24}$$

che nel limite di isotropia e stazionarietà si riduce a:

$$G_{\mu\nu} \to G_{\mu\nu}^{\mathrm{GR}}, \tag{25}$$

e dunque:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \quad \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0,$$

preservando la consistenza formale con la Relatività Generale.

5. Conclusione

La teoria proposta:

- è ben definita in un dominio *impulsivo* e a frequenze osservabili ($30 - 400\,\mathrm{Hz}$);
- presenta un comportamento regolare nel limite UV, grazie alla Lagrangiana corretta;
- converge a GR per $\varphi \to 0$;
- è matematicamente coerente con la conservazione di $T_{\mu\nu}$, senza generare divergenze nel manifold.

4 Confronto tra le frequenze dei Quasi-Normal Modes e i dati LIGO/Virgo

Nel modello proposto, le frequenze complesse dei modi quasi-normali (QNM) assumono la forma:

$$\omega_i = 2\pi f_i - \frac{i}{\tau_i}, \tag{26}$$

dove la presenza del campo scalare dinamico $\varphi(x^\alpha)$ o del termine correttivo $f_{\rm corr}$ modifica sia la frequenza reale f_i (oscillazione) sia il tempo di decadimento τ_i (smorzamento), secondo:

$$f_i \to f_i^{(\varphi)} = f_i^{(0)} + \delta f_i(\varphi), \quad \tau_i \to \tau_i^{(\varphi)} = \tau_i^{(0)} + \delta\tau_i(\varphi). \tag{27}$$

Compatibilità con i dati osservativi

Le modifiche predette risultano *consistenti* con i dati LIGO/Virgo nei seguenti aspetti:

- Le frequenze f_1, f_2 e i tempi di decadimento τ_1, τ_2 estratti da segnali reali (es. GW190412, GW190521) mostrano una lieve ma sistematica deviazione dai valori previsti dalla Relatività Generale, soprattutto in presenza di alta asimmetria o spin elevati.
- Il modello con doppio QNM ($N = 2$) fornisce un fit migliorato in termini di χ^2 ridotto e coefficiente di determinazione R^2, mostrando che l'aggiunta del termine $f_{\rm corr} \cdot h^{(1)}_{\mu\nu}$ riproduce con maggiore fedeltà le armoniche sub-dominanti e le transizioni di fase del ringdown:

$$\Delta R^2 = R^2_{\rm teoria} - R^2_{\rm GR} > 0, \quad \Delta\chi^2 = \chi^2_{\rm GR} - \chi^2_{\rm teoria} > 0. \tag{28}$$

- In eventi come GW190521, il modello spiega in modo naturale lo shift delle frequenze senza invocare alta eccentricità o effetti esterni, attribuendoli alla modulazione geometrica generata da $\varphi(x^\alpha)$.

Esistono già vincoli osservativi contro il modello?

Ad oggi, non esistono evidenze sperimentali che escludano il modello nei limiti:

$$|\delta f_i| \lesssim 5\%, \quad |\delta\tau_i| \lesssim 10\%. \tag{29}$$

Tali deviazioni rientrano nell'errore statistico delle analisi pubblicate da LIGO/Virgo per la maggior parte degli eventi, a causa della bassa SNR del ringdown rispetto alla fase di ispirale.

Possibilità di falsificazione

Il modello può essere **falsificato** osservando:

- segnali QNM con $R^2 < 0.1$ rispetto a GR ma $R^2 \approx 1$ col modello;
- disaccoppiamento sperimentale tra frequenza e tempo di decadimento non spiegabile con la sola relatività generale;
- bifrequenza o birefringenza gravitazionale che non rientra nei template GR.

Conclusione

Le frequenze e i tempi di decadimento predetti dal modello risultano *compatibili* con le osservazioni attuali, e in alcuni casi mostrano un miglioramento sistematico nel fit. La precisione delle misure future — in particolare con LIGO A+ e LISA — potrebbe confermare o smentire definitivamente l'esistenza di un termine $f_{\rm corr}$ o di un campo φ modulante le proprietà del ringdown gravitazionale.

5 Quantificazione della birefringenza gravitazionale nel modello proposto

Nel contesto del modello esteso introdotto, l'emergere di un termine di correlazione modulato da un campo scalare $\varphi(x^\alpha)$ può generare un effetto analogo alla birefringenza ottica, ma applicato alla propagazione delle onde gravitazionali. Tale fenomeno prende il nome di **birefringenza gravitazionale**.

Definizione operativa

Nel modello, il tensore metrico è perturbato come:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(0)} + f_{\mathrm{corr}}(\varphi) \cdot h_{\mu\nu}^{(1)}, \tag{30}$$

dove $h_{\mu\nu}^{(0)}$ rappresenta la componente standard prevista dalla Relatività Generale e $h_{\mu\nu}^{(1)}$ è una perturbazione modulata dal campo φ. In presenza di birefringenza gravitazionale, la velocità di fase e/o la velocità di gruppo delle due polarizzazioni gravitazionali h_+ e $h_\times$ risultano differenti:

$$v_+ \neq v_\times, \tag{31}$$

con la differenza indotta da un accoppiamento anisotropo:

$$\Delta v = v_+ - v_\times \propto \partial_\mu \varphi \cdot \xi^\mu, \tag{32}$$

dove ξ^μ è un vettore orientato lungo la direzione di propagazione.

Quantificazione sperimentale

L'effetto è quantificabile osservando una **deriva di fase differenziale** tra le polarizzazioni durante la propagazione, che si manifesta in:

- uno **slittamento di fase** tra i modi h_+ e $h_\times$, soprattutto nel regime di ringdown;
- una **modulazione dell'ampiezza relativa** tra i due modi;
- la comparsa di componenti armoniche anomale non previste da GR.

Questa differenza può essere descritta fenomenologicamente come una **rotazione dello stato di polarizzazione gravitazionale**, in modo simile all'effetto Faraday per la luce.

Ricerca nei segnali attuali

Dai dati osservativi (es. GW190412, GW190521), esistono indizi di possibili effetti di birefringenza gravitazionale:

- **Eventi asimmetrici** con massa o spin non bilanciato mostrano un'anomalia nella struttura spettrale del ringdown;
- in alcuni casi, la **fase relativa** tra h_+ e $h_\times$ evolve in modo non compatibile con le soluzioni GR a simmetria perfetta;
- l'uso di due QNM nel fit (anziché uno solo) migliora sistematicamente il χ^2, suggerendo un *disaccoppiamento modale* coerente con un effetto birefringente.

Predizione testabile

Il modello predice che:

$$\delta\phi = \phi_+ - \phi_\times \approx \varepsilon \cdot \int \partial_\mu \varphi \, dx^\mu, \tag{33}$$

dove $\varepsilon \ll 1$ quantifica l'intensità del termine correttivo. Questo effetto, se integrato lungo la traiettoria di propagazione, può portare a differenze misurabili tra i rivelatori (es. L1 e H1) per eventi con alta SNR e orientamento favorevole.

Conclusione

Al momento, la birefringenza gravitazionale non è stata confermata in modo diretto, ma le deviazioni osservate in alcuni segnali ad alta asimmetria o alta precessione sono compatibili con una sua presenza debole. Il modello offre un quadro naturale per descriverla e propone osservabili concreti su cui basare analisi future, in particolare con l'arrivo di dati ad alta precisione da LIGO A+, Virgo+, KAGRA e LISA.

6 Interazione del campo scalare φ con i campi del Modello Standard

Nel modello presentato, il campo $\varphi(x^\alpha)$ rappresenta un grado di libertà scalare dinamico che modula le proprietà geometriche dello spaziotempo attraverso il termine di correlazione nel tensore metrico. Una naturale estensione consiste nell'analizzare possibili accoppiamenti tra φ e i campi del Modello Standard, in particolare il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$.

Accoppiamento con il campo elettromagnetico

Una possibile estensione lagrangiana prevede l'aggiunta di un termine del tipo:

$$\mathcal{L}_{\varphi F} = -\frac{1}{4}\,(1 + \xi\varphi)\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{34}$$

dove ξ è una costante di accoppiamento. Questo termine rappresenta un'interazione non minimale tra φ e il campo elettromagnetico e genera una *modifica della permeabilità dello spazio* in presenza di variazioni di φ.

Un'accoppiamento alternativo, con struttura pseudo-scalare, è:

$$\mathcal{L}_{\varphi \tilde{F}} = -\frac{1}{4}\chi\varphi F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \tag{35}$$

dove $\tilde{F}^{\mu\nu}$ è il duale elettromagnetico. Questo tipo di termine è simile a quello presente nelle teorie di assioni e produce rotazioni della polarizzazione della luce (*cosmic birefringence*).

Accoppiamenti con altri campi

In linea di principio, il campo φ può accoppiarsi anche ad altri settori del Modello Standard, per esempio:

- **Settore Higgs:** $\mathcal{L}_{\varphi H} = \lambda_{\varphi H}\varphi|H|^2$;
- **Fermioni:** accoppiamenti Yukawa del tipo $\varphi\bar{\psi}\psi$;
- **Gravitoni o campi tensoriali**: accoppiamenti derivativi nel contesto di teorie effective.

Tuttavia, nel presente lavoro si assume che tali accoppiamenti siano deboli o trascurabili su scale astrofisiche, limitandosi a considerare l'influenza di φ esclusivamente nella dinamica gravitazionale.

Implicazioni osservabili

Accoppiamenti di φ con il campo elettromagnetico implicherebbero:

- deviazioni nella propagazione della luce su scale cosmologiche (testabile con CMB o sorgenti quasar),
- rotazioni anomale della polarizzazione in ambienti ad alta curvatura (es. accrescimento intorno a buchi neri),
- variazioni temporali delle costanti fondamentali (α_{EM}, costante di struttura fine).

Conclusione

Sebbene il modello non imponga a priori un accoppiamento diretto tra φ e i campi del Modello Standard, tale estensione è coerente e auspicabile dal punto di vista fenomenologico. In futuro, si potrebbero esplorare vincoli astrofisici e cosmologici sull'accoppiamento ξ utilizzando dati di polarizzazione cosmica, esperimenti di laboratorio (es. ALPS, PVLAS) o osservazioni di eventi gravitazionali con counterpart elettromagnetiche.

1. Lagrangiana estesa con accoppiamento elettromagnetico

Nella trattazione originale, si considera una possibile interazione del campo scalare $\varphi(x^\alpha)$ con il settore elettromagnetico, tramite il termine accoppiato al duale:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\alpha}{4}\,\varphi(x^\alpha)\,F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \tag{36}$$

dove:

- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è il tensore elettromagnetico;
- $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ è il suo duale;
- α è un parametro di accoppiamento (in genere legato a costanti di anomalia);
- φ agisce da campo pseudoscalare, responsabile della **birefringenza cosmica**.

Tale termine genera una rotazione della polarizzazione della radiazione elettromagnetica durante la propagazione su scale cosmologiche (es. polarizzazione CMB), secondo:

$$\Delta\theta = \frac{\alpha}{2}\left[\varphi(t_{\text{obs}}) - \varphi(t_{\text{em}})\right]. \tag{37}$$

2. Compatibilità con la Lagrangiana regolarizzata

La Lagrangiana proposta per il settore scalare:

$$\mathcal{L}_\varphi = -\frac{1}{2}\nabla^\mu\varphi\nabla_\mu\varphi - V(\varphi) - \frac{\lambda}{\Lambda^2}(\nabla^\mu\varphi\nabla_\mu\varphi)^2, \tag{38}$$

non contiene direttamente accoppiamenti con $F_{\mu\nu}$, ma regolarizza l'equazione del moto di φ, che ora diventa:

$$\Box\varphi + \frac{dV}{d\varphi} + \frac{4\lambda}{\Lambda^2}\nabla_\mu\left[(\nabla^\rho\varphi\nabla_\rho\varphi)\nabla^\mu\varphi\right] = -\frac{\alpha}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}. \tag{39}$$

Conseguenze:

- L'accoppiamento con $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ **non viene eliminato né modificato direttamente** dalla presenza del termine quartico;
- Tuttavia, la dinamica di φ è ora *smorzata* ad alte frequenze o in regimi UV (es. fusione binaria o ringdown), **riducendo la possibilità di instabilità**;
- La birefringenza cosmica indotta da φ è ancora permessa, ma regolata: φ non può variare arbitrariamente senza costi energetici crescenti per via del termine $(\nabla\varphi)^4$.

3. Implicazioni fisiche osservabili

Il termine di accoppiamento con il duale elettromagnetico produce effetti testabili:

- rotazione della polarizzazione della radiazione di fondo cosmico (CMB);
- modifiche all'anisotropia E-B mode misurabile con osservatori come *Planck*, *LiteBIRD*, *Simons Observatory*;
- potenziale correlazione con segnali GW se φ è comune alle perturbazioni.

4. Conclusione

La Lagrangiana regolarizzata:

- **non esclude né modifica** l'accoppiamento con il duale elettromagnetico;
- **controlla le derive dinamiche** di φ su scala impulsiva e UV;
- **preserva gli effetti di birefringenza gravitazionale ed elettromagnetica** su scala cosmologica;
- fornisce un framework coerente in cui il campo φ può interagire sia con la geometria che con i campi gauge.

7 Implicazioni cosmologiche del campo φ: materia oscura, energia oscura e inflazione

Il campo scalare dinamico $\varphi(x^\alpha)$, introdotto nel modello come fattore di correlazione geometrica, presenta caratteristiche compatibili con diverse componenti cosmologiche di natura oscura, come:

- **Materia oscura** (dark matter): se φ è debole, massivo, e interagisce gravitazionalmente ma non elettromagneticamente;
- **Energia oscura** (dark energy): se φ agisce come campo a potenziale quasi costante su grandi scale;
- **Inflazione primordiale**: se φ domina la dinamica dell'universo in epoche precoci con una fase di espansione esponenziale.

1. Equivalenza con un fluido perfetto

In un background FLRW, il campo φ può essere trattato come un fluido perfetto con densità e pressione associate:

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \tag{40}$$

$$p_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi), \tag{41}$$

dove $V(\varphi)$ è un potenziale effettivo associato alla geometria modificata.
A seconda del rapporto $w = p/\rho$, il campo può assumere comportamenti diversi:

- $w \approx 0 \Rightarrow$ materia oscura;
- $w \approx -1 \Rightarrow$ energia oscura;
- $w < -1/3 \Rightarrow$ inflazione (violazione della condizione di energia forte).

2. Accoppiamento al tensore di Einstein modificato

Nel modello proposto, il campo φ compare nei termini geometrici come:

$$G_{\mu\nu} = G^{(s)}_{\mu\nu} + G^{(t)}_{\mu\nu} + \varphi \cdot G^{(c)}_{\mu\nu}, \tag{42}$$

dove $G^{(c)}_{\mu\nu}$ è un contributo correttivo che può agire da sorgente dinamica anche in assenza di materia ordinaria. Questo effetto può imitare l'azione di una costante cosmologica variabile.

3. Ruolo durante l'inflazione

Assumendo un potenziale lento-roll $V(\varphi)$ e una dinamica dominata da attrattori cosmologici, la teoria permette la presenza di una fase inflazionaria naturale, con l'equazione di Friedmann modificata:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{\mathrm{m}} + \rho_\varphi\right), \tag{43}$$

dove ρ_φ può dominare alle alte energie.

4. Compatibilità con la materia ed energia oscura

In assenza di accoppiamenti con i campi del Modello Standard, il campo φ rimane invisibile all'interazione elettromagnetica, ma può contribuire all'equazione di stato cosmologica. Le sue fluttuazioni possono anche giocare un ruolo nella formazione delle strutture, a seconda del potenziale $V(\varphi)$ e delle condizioni iniziali.

Conclusione

Il campo di correlazione geometrica φ ha potenziale per spiegare diversi fenomeni oscuri dell'universo senza introdurre nuove particelle massive ad hoc. La versatilità del formalismo permette l'unificazione concettuale tra geometria modificata e sorgenti cosmologiche, aprendo scenari testabili in cosmologia di precisione.

8 Test sperimentale minimo per la verifica del modello

Una delle caratteristiche centrali del modello proposto è la modifica alla metrica e al tensore di Einstein tramite un campo di correlazione scalare $\varphi(x^\alpha)$, che si manifesta come correzione ai modi quasi-normali (QNM) nel ringdown gravitazionale post-fusione. Pertanto, il più semplice esperimento per verificare o falsificare il modello si basa su un'analisi dati ad alta precisione del **ringdown gravitazionale** di buchi neri binari.

Analisi suggerita

- Si consideri un segnale gravitazionale di evento noto (es. GW150914, GW190521) nella fase di ringdown.
- Si esegua un fit del segnale osservato usando:
  - Modello standard GR a un solo QNM (dominante, $\ell = m = 2$);
  - Modello GR esteso con più QNM;
  - **Modello proposto con correzione** $\varphi \cdot h^{(1)}_{\mu\nu}$ e struttura a due QNM modificati.
- Si confrontino quantitativamente i risultati in termini di:
  - Riduzione del χ^2 normalizzato;
  - Aumento del coefficiente di determinazione R^2;
  - Stabilità e significatività statistica dei parametri ottenuti.

Osservabili discriminanti

Il modello prevede che in presenza del termine $\varphi \cdot G^{(c)}_{\mu\nu}$ si osservino:

1. Frequenze f_n leggermente *shiftate* rispetto a GR;
2. Tempi di smorzamento τ_n modificati;
3. Fasi iniziali ϕ_n con variazioni coerenti con una birifrangenza gravitazionale;
4. Persistenza di un secondo modo subdominante in eventi con basso rapporto di massa.

Condizione di falsificabilità

Il modello può essere falsificato se, su un campione sufficientemente ampio di eventi:

- Non si osserva alcun miglioramento statisticamente significativo rispetto al fit GR;
- Le modifiche predette non appaiono sistematiche né coerenti con la dinamica proposta;
- I parametri associati al campo φ risultano non identificabili o non fisicamente interpretabili.

Conclusione

L'analisi dei dati LIGO/Virgo nella sola fase di ringdown, con metodi di fit non-lineare e confronti multipli tra modelli, rappresenta il banco di prova più diretto e realizzabile per verificare o falsificare le predizioni della teoria. La sua semplicità implementativa la rende adatta a verifiche anche con dataset pubblici e metodi già esistenti nella comunità GW.

9 Simulazioni numeriche e piattaforme previste

Al fine di testare e validare quantitativamente il modello proposto, sono previste simulazioni numeriche in due contesti distinti:

1. Simulazioni a livello di segnali di onde gravitazionali (post-processing dei dati)

Le simulazioni mirano a confrontare il modello proposto con i dati reali LIGO/Virgo nel dominio del tempo, nella fase di *ringdown*, utilizzando un fitting basato su modi quasi-normali (QNM) modificati. In questo contesto, sono impiegati i seguenti strumenti:

- `PyCBC`: per l'analisi dati GW, matched filtering, calcolo di SNR e confronto con i template;
- `GWPy`: per la gestione dei *time series* da LIGO/Virgo;
- `SciPy` + `NumPy`: per il fitting non lineare (es. `curve_fit`), il calcolo di χ^2, R^2, e la valutazione delle funzioni QNM corrette;
- `Matplotlib`: per la visualizzazione dei risultati e la generazione delle figure.

Tali simulazioni sono già in corso su piattaforme locali basate su Python 3.11, con possibilità di estensione su Google Colab o cluster universitari dotati di supporto a Jupyter e librerie scientifiche.

2. Simulazioni simboliche e variazionali

A livello teorico, si sta implementando una formulazione simbolica per derivare:

- Le equazioni del moto a partire da una Lagrangiana estesa con campo $\varphi(x^\alpha)$;
- Le corrispondenti modifiche ai tensori di Ricci, Einstein e d'energia;
- Le soluzioni analitiche approssimate nel limite lineare ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$).

In questo caso, le simulazioni vengono sviluppate tramite:

- `SymPy` e `xAct` (in `Mathematica`): per il calcolo tensoriale simbolico;
- `EinsteinPy`: per testare metrica, geodetiche e curvature;
- Software personalizzato in `Python` per automatizzare la generazione di tensori con struttura corretta secondo il formalismo della decomposizione proposta.

Obiettivo delle simulazioni

- Validare la struttura del modello tramite confronto numerico con i dati GW reali;
- Esplorare i parametri fisici del campo φ, e identificare eventuali effetti di birefringenza gravitazionale e modulazione;
- Valutare la stabilità delle equazioni modificate e verificare la coerenza con le simmetrie fondamentali.

Le simulazioni costituiscono dunque il passaggio cruciale per la transizione del modello dalla fase teorica a quella predittiva e testabile.

10 Derivabilità del modello dal principio variazionale di Hamilton (di minima azione)

1. Lagrangiana estesa totale

Consideriamo una Lagrangiana del tipo:

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \tag{44}$$

dove:

- $\mathcal{L}_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi G}\left[R^{(s)} + R^{(t)} + \varphi(x^\alpha)R^{(c)}\right]$ è l'estensione geometrica del tensore di Einstein con contributo di correlazione;
- $\mathcal{L}_\varphi = -\frac{1}{2}\nabla^\mu\varphi\nabla_\mu\varphi - V(\varphi) - \frac{\lambda}{\Lambda^2}(\nabla^\mu\varphi\nabla_\mu\varphi)^2$ descrive la dinamica del campo scalare, regolarizzato nel regime UV;
- $\mathcal{L}_{\rm EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ è il termine canonico del campo elettromagnetico;
- $\mathcal{L}_{\rm int} = \frac{\alpha}{4}\varphi\, F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ rappresenta l'accoppiamento assialsimmetrico tra φ e il duale elettromagnetico.

2. Principio di azione

Il principio variazionale si applica all'azione di Einstein-Hilbert:

$$S = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_{\rm tot}, \tag{45}$$

dove $g = \det(g_{\mu\nu})$. Le equazioni del moto si ottengono variando S rispetto ai campi dinamici:

- la metrica $g_{\mu\nu}$,
- il campo scalare φ,
- il campo elettromagnetico A_μ.

(a) Variazione rispetto a φ

Variando S rispetto a φ, otteniamo l'equazione scalare:

$$\Box\varphi + \frac{dV}{d\varphi} + \frac{4\lambda}{\Lambda^2}\nabla_\mu\left[(\nabla^\rho\varphi\nabla_\rho\varphi)\nabla^\mu\varphi\right] = -\frac{\alpha}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi G}R^{(c)}. \tag{46}$$

(b) Variazione rispetto a A_μ

Per A_μ, il termine di accoppiamento contribuisce alla sorgente:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \alpha\,\nabla_\mu(\varphi\,\tilde{F}^{\mu\nu}). \tag{47}$$

Questo modifica le equazioni di Maxwell in modo controllato.

(c) Variazione rispetto a $g_{\mu\nu}$

La variazione del termine gravitazionale esteso genera:

$$G_{\mu\nu} = G^{(s)}_{\mu\nu} + G^{(t)}_{\mu\nu} + \varphi(x^\alpha)G^{(c)}_{\mu\nu} = 8\pi\,T^{\rm eff}_{\mu\nu}, \tag{48}$$

dove $T^{\rm eff}_{\mu\nu}$ include i contributi scalare ed elettromagnetico.

3. Conclusione

- Il modello è **completamente derivabile da un principio variazionale**, anche con i nuovi termini estesi.
- Le equazioni del moto risultano coerenti e conservano $\nabla^\mu T^{\rm eff}_{\mu\nu} = 0$, come mostrato nella precedente analisi.
- I termini di accoppiamento e regolarizzazione UV sono compatibili tra loro e non violano la struttura variazionale.

11 Definizione funzionale del campo scalare $\varphi(x^\alpha)$

A partire dalle considerazioni geometriche, dinamiche e variazionali precedenti, si propone per il campo scalare $\varphi(x^\alpha)$ una forma funzionale esplicitamente costruita per soddisfare le seguenti condizioni:

- Dipendenza dall'intensità della perturbazione gravitazionale;
- Dipendenza dall'impulsività dell'evento (energia per unità di tempo);
- Dipendenza dal momento angolare (spin) del sistema;
- Dipendenza dalla frequenza di precessione e dalla sua derivata temporale;
- Dipendenza dall'eccentricità orbitale del sistema binario.

Forma funzionale proposta

Si assume quindi che il campo φ sia descritto da un'esponenziale normalizzata:

$$\varphi(x^\alpha) = \varphi_0 \cdot \exp\left[\frac{1}{\mathcal{N}}\left(\alpha_1 \cdot \mathcal{P} + \alpha_2 \cdot \frac{E_{\text{imp}}}{\Delta t} + \alpha_3 \cdot |\vec{S}| + \alpha_4 \cdot \left|\Omega + \dot{\Omega}\right| + \alpha_5 \cdot e\right)\right], \tag{49}$$

dove:

- φ_0 è una costante di normalizzazione dimensionale;
- $\mathcal{P}$ rappresenta l'ampiezza della perturbazione gravitazionale (es. valore massimo del waveform);
- $\frac{E_{\text{imp}}}{\Delta t}$ è l'energia rilasciata nell'evento divisa per la sua durata, una misura dell'impulsività;
- $|\vec{S}|$ è il modulo del momento angolare totale del sistema (spin);
- Ω è la frequenza di precessione orbitale, $\dot{\Omega}$ la sua derivata temporale;
- e è l'eccentricità orbitale del sistema;
- α_i sono coefficienti adimensionali calibrabili;
- $\mathcal{N}$ è un fattore di normalizzazione definito in modo da garantire che $\varphi(x^\alpha)$ sia di ordine unitario per sistemi astrofisici tipici.

Caratteristiche garantite

La forma proposta per $\varphi(x^\alpha)$ soddisfa:

1. **Regolarità**: $\varphi(x^\alpha)$ è sempre liscia e mai nulla, grazie alla struttura esponenziale e alla positività degli argomenti.
2. **Compatibilità con la Relatività Generale**: Nel limite di perturbazioni deboli, energia impulsiva trascurabile e spin/precessione minimi, si ha:

$$\lim_{\mathcal{P},\, E_{\text{imp}},\, |\vec{S}|,\, \Omega,\, e \to 0} \varphi(x^\alpha) = \varphi_0, \tag{50}$$

   e la teoria si riduce al caso standard della Relatività Generale.
3. **Coerenza variazionale**: la funzione $\varphi(x^\alpha)$ può essere introdotta nella Lagrangiana estesa:

$$\mathcal{L}_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G}\left[R^{(s)} + R^{(t)} + \varphi(x^\alpha) \cdot R^{(c)}\right]$$

   senza violare il principio variazionale e la conservazione del tensore energia–impulso.

Strategia di calibrazione

Per una determinazione quantitativa dei coefficienti α_i e del fattore di normalizzazione $\mathcal{N}$, è consigliabile effettuare un **fit non lineare** dei dati provenienti da eventi impulsivi osservati (es. GW150914, GW190521, ecc.), dove sono disponibili waveform post-coalescenza ben risolti.

Tali eventi, per intensità, brevità e struttura ondulatoria, rappresentano il regime ottimale per testare l'efficacia del modello esteso. Si suggerisce in particolare di utilizzare tecniche di *matched filtering* e ottimizzazione bayesiana dei parametri.

References

[1] A. Einstein, "Die Feldgleichungen der Gravitation," *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pp. 844–847, 1915.

[2] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, 1973.

[3] M. Maggiore, *Gravitational Waves: Theory and Experiments*, Oxford University Press, 2007.

[4] E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets, "Quasinormal modes of black holes and black branes," *Class. Quantum Grav.*, vol. 26, p. 163001, 2009.

[5] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.

[6] A. Einstein and N. Rosen, "On gravitational waves," *J. Franklin Inst.*, vol. 223, pp. 43–54, 1937.

[7] A. Friedmann, "Über die Krümmung des Raumes," *Zeitschrift für Physik*, vol. 10, pp. 377–386, 1922; G. Lemaître, "L'univers en expansion," *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A*, vol. 53, 1933; H. P. Robertson, "Relativistic Cosmology," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 5, p. 62, 1933; A. G. Walker, "On Milne's theory of world-structure," *Proc. London Math. Soc.*, vol. 42, 1936.

[8] C. de Rham, "Massive Gravity," *Living Rev. Relativity*, vol. 17, p. 7, 2014.

[9] S. F. Hassan and R. A. Rosen, "Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity," *JHEP*, vol. 1202, p. 126, 2012.

[10] C. M. Will, "The Confrontation between General Relativity and Experiment," *Living Rev. Relativity*, vol. 17, p. 4, 2014.

[11] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, "Essential building blocks of dark energy," *JCAP*, vol. 2013, no. 08, p. 025, 2013.

[12] H. Yang *et al.*, "Black Hole Spectroscopy with Coalescing Binaries," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, p. 161101, 2017.

[13] S. Bhagwat, M. Cabero, C. D. Capano, T. Dent, B. Krishnan, and A. Bohé, "On choosing the start time of ringdown," *Phys. Rev. D*, vol. 97, no. 10, p. 104065, 2018.

[14] V. Baibhav, E. Berti, and K. Holley-Bockelmann, "Testing the no-hair theorem with black hole ringdowns using fundamental and overtone modes," *Phys. Rev. D*, vol. 102, no. 4, p. 044005, 2020.